Równanie $\alpha^x = x$

(wersja robocza...)

Streszczenie: Najpierw zajmiemy się ogólnym rozeznaniem za pomocą metod analitycznych tj. przy pomocy funkcji $f(x)=\alpha^x - x$, $h(x)=\log_\alpha x - x$ i rachunku różniczkowego, wyprowadzimy zależność α od x tj. $\alpha = \sqrt[x]{x}$ i ją uzasadnimy, a w drugiej części przedstawimy sposób uzyskania zależności $x = k(\alpha)$ za pomocą rekurencji $f_n = \alpha^{f_{n-1}}$ i $h_n = \log_\alpha h_{n-1}$ (z odpowiednimi warunkami początkowymi), tj.: $\lim_{n\to\infty} f_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} h_n = x$ którą również uzasadnimy. Równanie to w zależności od stałej α ma jedno, dwa lub brak rozwiązań rzeczywistych, dlatego będziemy rozpatrywali oddzielnie każdy z przypadków.

Uwagi: Wszystkie zamieszczone wykresy funkcji są tylko ich szkicami, które uwzględniają pewne własności potrzebne przy wnioskowaniu. Wszędzie, gdzie będzie mowa o równaniu (pierwiastkach równania), będzie to równanie z tytułu tej pracy tj.:

$$\alpha^x = x \text{, gdzie } \alpha \in R_+, x \in R_+ \cup \{0\}$$

CZĘŚĆ I

1 Funkcja $f(x)=\alpha^x - x$ [1]

Dziedziną funkcji będzie $D_f = R_+ \cup \{0\}$, $\alpha \in R_+$.

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) = \alpha^x \ln\alpha - 1 \qquad \frac{df^2(x)}{d^2x} \equiv f''(x) = \alpha^x \ln^2\alpha$$

Rozpatrzmy funkcję w dwóch przedziałach dla stałej α.

1.1 Niech $\alpha \in (0;1)$

$f'(x)=0$, $\alpha^x = \dfrac{1}{\ln\alpha} < 0 \Rightarrow x \in \phi$ czyli brak ekstremów. I faktycznie funkcja $f(x)$ jest stale malejąca. $f(0)=1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $f(1)<0$ zatem $f(x)$ ma jedno rozwiązanie ($x = x_1$) w przedziale $(0;1)$ (dowodzimy tego za pomocą *własności Darboux* , choć w nawiasie mówiąc podobno to B. Bolzano wcześniej wykazał taką własność, zresztą samemu definiując ciągłość funkcji, ale historia bywa niesprawiedliwa – pisze o tym np. prof. Hugo Steinhaus np. tu fragment http://www.dejaview.cad.pl/math_pogadankahistoryczna.php), popatrzmy na *szkic* wykresu $f(x)$:

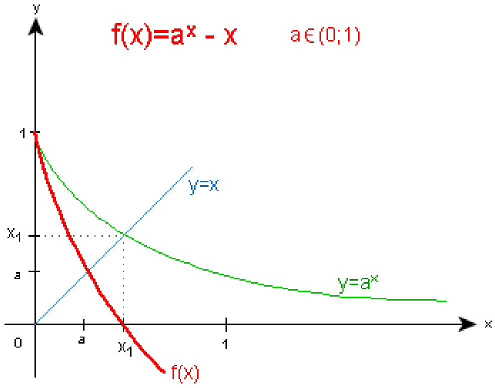

Fig.1

1.2 Niech $\alpha \in (1;\lambda]$, gdzie $\lambda = e^{1/e}$

Rozpatrujemy α w powyższym przedziale, ponieważ jak wykażemy niżej, dla $\alpha > \lambda$ równanie nie posiada rozwiązań.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \log_{\alpha} \dfrac{1}{\ln \alpha} = \mu \;\wedge\; f''(x) > 0 \Rightarrow$ w punkcie $x = \mu$ funkcja $f(x)$ - osiąga minimum lokalne równe $f(\mu) = \alpha^{\log_{\alpha} \frac{1}{\ln \alpha}} - \log_{\alpha} \dfrac{1}{\ln \alpha} = \dfrac{1}{\ln \alpha} - \log_{\alpha} \dfrac{1}{\ln \alpha}$

$f(0) = 1, \;\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Zatem z powyższego wynika że (dla pewnego α):

a) jeśli $f(\mu) = 0 \Rightarrow f(x)$ ma jedno rozwiązanie, owe $x = \mu$ (Fig.2a)
b) jeśli $f(\mu) > 0 \Rightarrow f(x)$ nie ma rozwiązań (Fig.2b)
c) jeśli $f(\mu) < 0 \Rightarrow f(x)$ ma dwa różne rozwiązania $x = x_1 \wedge x = x_2$ (Fig.2c)

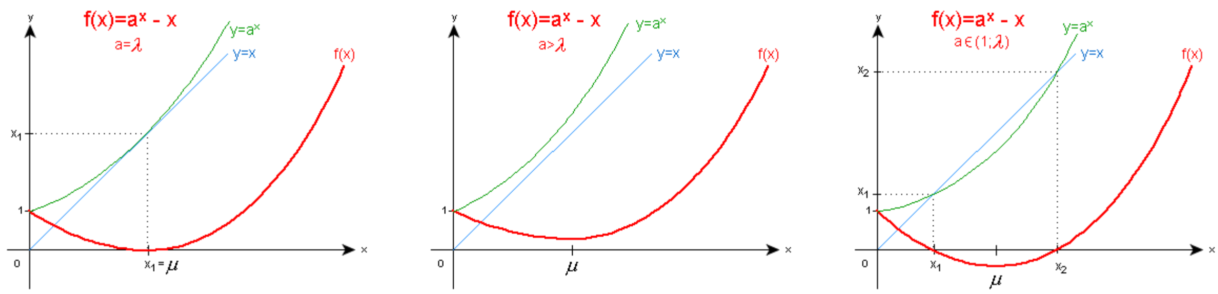

Fig.2a Fig.2b Fig.2c

Ad a) Znajdźmy tą graniczną wartość α, dla której równanie ma tylko jedno rozwiązanie i oznaczmy przez λ:

$$f(\eta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\ln \alpha} - \log_{\alpha} \frac{1}{\ln \alpha} = 0 \Rightarrow \alpha^{\frac{1}{\ln \alpha}} = \frac{1}{\ln \alpha} \Rightarrow e = \frac{1}{\ln \alpha} \Rightarrow \alpha = e^{\frac{1}{e}} = \lambda \qquad \textbf{[2a]}$$

Zatem $\alpha = \lambda \wedge x = \log_{\alpha} \frac{1}{\ln \alpha} \Rightarrow x = \log_{e^{\frac{1}{e}}} e \Rightarrow x = e$ **[2b]**

Ad b) Dla $\alpha > \lambda$ brak rozwiązań, dlatego będziemy rozpatrywali tylko przedział $\alpha \in (1;\lambda]$

Ad c) Dla $\alpha \in (1;\lambda)$ równanie ma dwa rozwiązania

(2a) i (2b) podpowiadają nam o jaką zależność chodzi, załóżmy zatem że: $\alpha = x^{\frac{1}{x}}$, wtedy otrzymamy:

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)^{x} = x \qquad [3]$$

a to wydaje się trywialne.

Teraz wykażemy, iż istotnie funkcja $g(x) = \sqrt[x]{x}$ w swoim zbiorze wartości zawiera przedział $g(x) \in (0,\lambda]$, czyli odwzorowuje wszystkie możliwe wartości dla stałej α.

1.3 Funkcja $g(x) = \sqrt[x]{x}$, $x \in R_{+}$

$g(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$, $g(0) =$ *nie określone*, $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$,

$g'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$, $g'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

$g''(e) < 0$ zatem w punkcie $x = e$, funkcja $g(x)$ ma maksimum lokalne równe $g(e) = e^{\frac{1}{e}}$

Spostrzeżenia:

a) w przedziale $x \in (0,e)$ funkcja $g(x)$ rośnie od $\lim\limits_{x\to 0^{+}} g(x) = 0$ do $\lim\limits_{x\to e^{-}} g(x) = e^{\frac{1}{e}}$

b) dla $x = e$ funkcja $g(x) = e^{\frac{1}{e}}$

c) dla $x \in (e,+\infty)$ maleje od $\lim\limits_{x\to e^{+}} g(x) = e^{\frac{1}{e}}$ do $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$

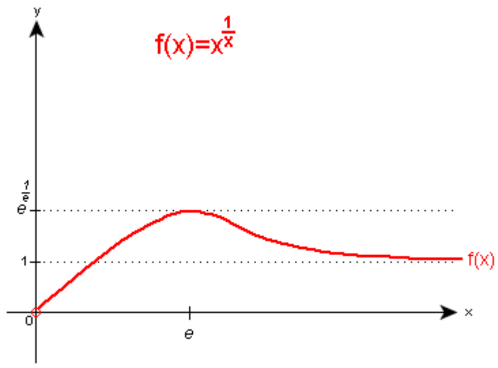

Fig.3

Wnioski:
Funkcja $g(x)$ spełnia nasze wymagania, dla $x \in (0,1) \cup \{e\}$ jest jednoznaczna (istnieje tylko jeden przeciwobraz w przedziale $(0,1) \cup \left\{ e^{\frac{1}{e}} \right\}$ tj. rozwiązanie dla danego α. Dla $x \in (1,+\infty) \setminus \{e\}$ dwa przeciwobrazy, czyli dwa różne rozwiązania tak jak to zauważyliśmy już w 1.2 c).

Podsumowanie:
Choć nadal nie mamy prostej zależności *x* od stałej α, bo niejako wróciliśmy do punktu wyjścia, mamy przynajmniej ogólny obraz funkcji $f(x)$. W drugiej części zajmiemy się metodą, która pozwoli nam w sposób przybliżony uzyskać pierwiastki równania za pomocą rekurencji (oraz za pomocą granicy dokładne wartości).

2 Funkcja $h(x) = \log_a x - x$ [4]

Niech $D_h = R_+$ dla $\alpha \in R_+ / \{1\}$.

$$\frac{dh(x)}{dx} \equiv h'(x) = \frac{1}{x \ln a} - 1 \qquad \frac{d^2 h(x)}{dx^2} \equiv h''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a}$$

Rozpatrzmy funkcję w dwóch przedziałach stałej α.

2.1 Niech $\alpha \in (0;1)$

$\lim_{x \to 0+} h(x) = +\infty \wedge \lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty \Rightarrow$ zatem mamy miejsce zerowe jako, że funkcja jest ciągła w dziedzinie. Pochodna nie ma miejsc zerowych, zatem funkcja $h(x)$ ma tylko jedno miejsce zerowe (rozwiązanie).

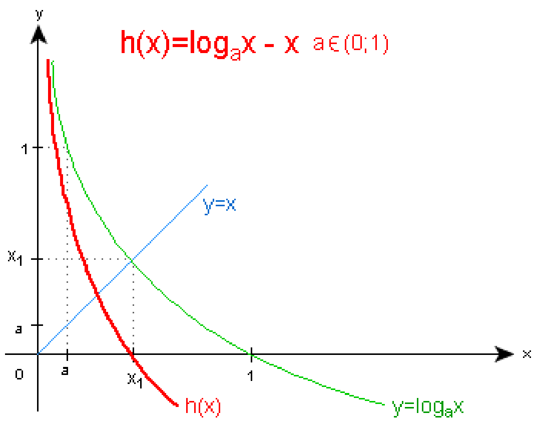

Fig.4

2.2 Niech $\alpha \in (1;\lambda]$, gdzie $\lambda = e^{\frac{1}{e}}$

Tak jak w punkcie 1.2 rozpatrujemy tylko taki przedział dla α, w którym funkcja $h(x)$ ma miejsca zerowe.

$\lim_{x \to 0+} h(x) = -\infty \wedge \lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ - ale z pierwszej pochodnej wiemy że nie jest stale monotoniczna:

$h'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x \ln a} = 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{\ln a} = x \wedge h''(\mu) < 0 \Rightarrow$ funkcja $h(x)$ posiada maksimum lokalne w punkcie $x = \mu$. Zatem może mieć (analogicznie jak w punkcie 1.2):

a) Jedno rozwiązanie dla $\alpha = e^{\frac{1}{e}} = \lambda$

b) Brak rozwiązań dla $\alpha > \lambda$

c) Dwa rozwiązania dla $\alpha \in (1;\lambda)$

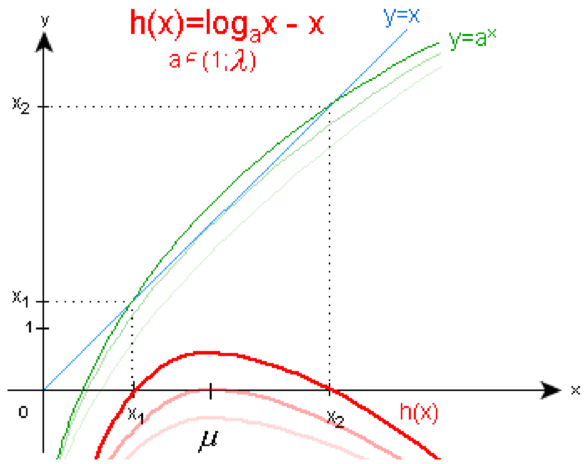

Fig.5

3 Rekurencja $f_n = \alpha^{f_{n-1}}$ & $h_n = \log_\alpha h_{n-1}$

Zajmiemy się tymi dwoma rekurencjami przy ustalonych warunkach początkowych dla α w określonych przedziałach liczb rzeczywistych tj.: $\alpha \in (0;1)$ i $\alpha \in (1;\lambda)$ oddzielnie - jedynie dla tych α równanie $\alpha^x = x$:

a) $\alpha \in (1;\lambda)$ posiada dwa rozwiązania (x_1, x_2)
b) $\alpha \in (0;1)$ posiada jedno rozwiązanie (x_1)
c) również dla $\alpha = \lambda = e^{1/e}$ równanie posiada jedno rozwiązanie $x = e$ tj.: $\left(e^{1/e}\right)^e = e$ także tym przypadkiem nie będziemy się już zajmować (znamy jego dokładne rozwiązanie)

3.1 Metoda otrzymania pierwszego rozwiązania x_1 dla $\alpha \in (1;\lambda)$

Rozpatrzmy rekurencję:

$$f_n = \alpha^{f_{n-1}} = \left.\alpha^{\alpha^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\alpha^{f_0}}}}}}\right\} n+1 \text{ poziomów} \qquad [5]$$

gdzie $f_0 \in [0;x_2)$ wtedy $f_1 = \alpha^{f_0}$, $f_2 = \alpha^{\alpha^{f_0}}$ itd.

Przykład:

$\alpha = \sqrt{2}$, $f_0 = 0$, $f_1 = \left(\sqrt{2}\right)^0 = 1$, $f_2 = \left(\sqrt{2}\right)^1 = \sqrt{2}$, $f_2 = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}} \approx 1{,}6325269$ itd... $f_{n\to\infty} = 2$

Przypatrzmy się teraz rekurencji (5) pod kątem funkcji (1) tj. $f(x) = \alpha^x - x$

Spostrzeżenie:

a) w przedziale $x \in [0;x_1) \equiv \Phi$, $f(x) = \alpha^x - x > 0$ zatem $\alpha^x > x$ czyli ciąg f_n przy f_0 należącym do przedziału Φ będzie stale monotoniczny tak jak funkcja $g(x) = \alpha^x$, $x \in \Phi$ tj. rosnący. $f_0 < f_1 < f_2 < \ldots$ oraz ograniczony z góry przez pierwszy pierwiastek równania $\alpha^x = x$ (oznaczamy go przez x_1), a ponieważ $g(x) < x_1$ dla $x \in \Phi$ oraz $\left(f_n = x_1 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} = x_1\right) \Rightarrow f_{n-1} = x_1$ itd. aż do $f_0 = x_1$. (ograniczenie górne). A my przyjęliśmy $f_0 \in \Phi$.

b) w przedziale $x \in (x_1;x_2) \equiv \Gamma$, $f(x) = \alpha^x - x < 0$ zatem $\alpha^x < x$ czyli ciąg f_n przy f_0 należącym do przedziału Γ będzie stale monotoniczny, malejący oraz ograniczony z dołu przez pierwszy pierwiastek tj. x_1 (analogicznie jak podpunkt a)

Definicja

Przedział, dla którego nieskończony ciąg kolejnych wyrazów rekurencji (5) jest zbieżny nazwijmy *przedziałem zbieżności* Ψ rekurencji f_n, w naszym przypadku $\Psi = [0; x_2)$.
Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = x_1, \; gdzie \;\; f_n = \alpha^{f_{n-1}}, \; f_0 \in [0; x_2) \qquad [6]$$

Istotnie, $f_n = f_{n-1}$ wydawać może się jedynie w nieskończoności (gdy $n \to \infty$) równe okazując nam owy pierwszy (x_1) pierwiastek równania $\alpha^x = x$.

Ilustracja otrzymywania kolejnych wyrazów za pomocą rekurencji (5).

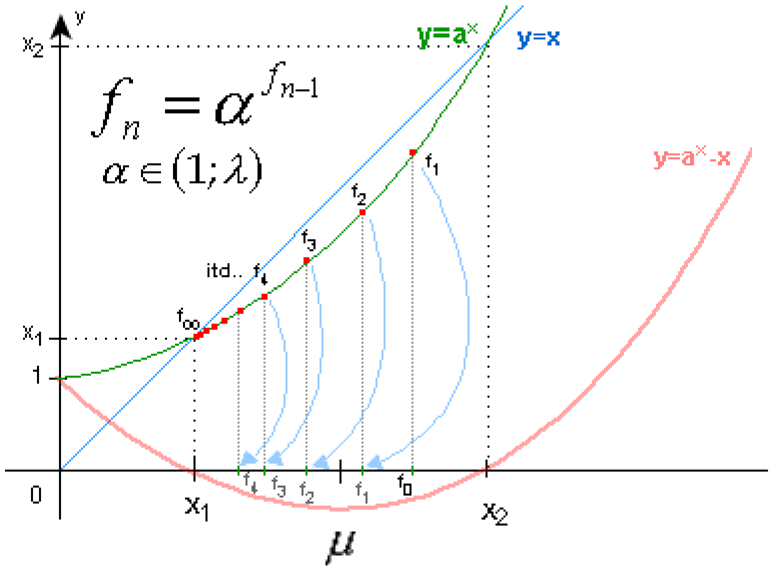

Fig.7

Proszę zauważyć, że z któregokolwiek miejsca wystartujemy (wybór wartości dla f_0) w przedziale $[0; x_2)$ dojdziemy (co prawda w nieskończoności) do punktu x_1. Dla $f_0 > x_2$ wartość α^{f_0} będzie większa od f_0 i kolejne wyrazy będą już tylko rosły do nieskończoności. Dlatego naszym *przedziałem zbieżności* w tym przypadku będzie przedział $[0; x_2)$. (Nawiasem mówiąc można by zahaczyć o ujemne wartości, bo i dla nich funkcja wykładnicza jest określona, ale to wystarczy).

3.2 Metoda otrzymania drugiego rozwiązania x₂ dla $\alpha \in (1; \lambda)$

Drugi pierwiastek równania uzyskujemy za pomocą rekurencji odwrotnej:

$$h_n = \log_\alpha h_{n-1} = \underbrace{\log_\alpha \log_\alpha \ldots \log_\alpha}_{n\ poziomów} h_0 \qquad [7]$$

gdzie $h_0 \in (x_1; x_2] = \Psi$. Ponieważ dla $x \in (x_1; x_2)$ funkcja $h(x) = \log_\alpha x - x > 0$, zatem ciąg h_n będzie rosnący i ograniczony z góry przez drugi pierwiastek równania tj. x_2.

$$\lim_{n\to\infty} h_n = x_2, \; gdzie \;\; h_n = \log_\alpha h_{n-1}, \;\; h_0 \in (x_1; x_2] \qquad [8]$$

Ilustracja otrzymywania kolejnych wyrazów za pomocą rekurencji (7).

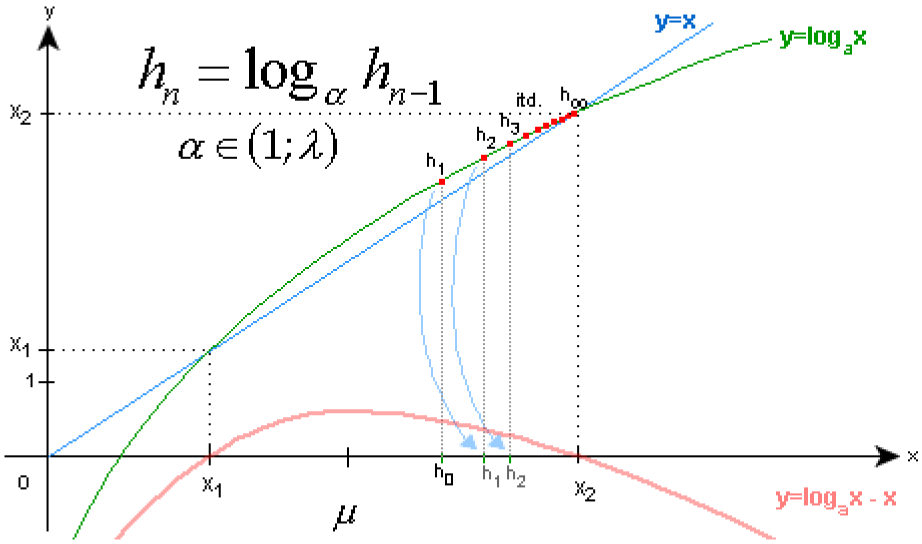

Fig.8

3.3 Metoda otrzymania pierwszego rozwiązania x_1 dla $\alpha \in (0;1)$

Zajmiemy się teraz przedziałem dla α, w którym mamy tylko jedno rozwiązanie równania $\alpha^x = x$.

Rekurencją, która pozwala otrzymać x_1 jest rekurencja (5):

$$f_n = \alpha^{f_{n-1}} = \left.\alpha^{\alpha^{\cdot^{\cdot^{\alpha^{f_0}}}}}\right\} n+1 \; poziomów \qquad [9]$$

gdzie $f_0 \in [0;+\infty)$.

Rekurencja ta tworzy wyrazy oscylujące wokół punktu x_1.
Przykład: $f_0 = 0$, $f_1 = 1 > f_0$, $f_2 = \alpha < f_1$, $f_3 = \alpha^\alpha > f_2$ itd.
Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = x_1, \; gdzie \;\; f_n = \alpha^{f_{n-1}}, \;\; f_0 \in [0;+\infty)$$

Ponieważ dla $\forall_{x>x_1} \alpha^x < x_1 \wedge \forall_{x<x_1} \alpha^x > x_1$ oraz $\alpha^\alpha > \alpha$ (ponieważ dla $a^1 = a$, $1 > \alpha$ a funkcja α^x jest malejąca dla rozpatrywanego α) Wystarczy zauważyć, że różnice są coraz mniejsze tj.: $\lim_{n\to\infty} |f_n - f_{n-1}| = 0$ czyli że: $|f_{n+2} - f_{n+1}| < |f_{n+1} - f_n|$

Rozbijając na dwa przypadki (ponieważ jedna strona ujemna implikuje dodatnią po prawej i odwrotnie)

a) Jeśli $f_{n+2} > f_{n+1}$ to:

$$f_{n+2} - f_{n+1} < -f_{n+1} + f_n \Rightarrow f_{n+2} < f_n$$

b) Jeśli $f_{n+2} < f_{n+1}$ to:

$$-f_n + f_{n-1} < f_{n-1} - f_{n-2} \Rightarrow f_n > f_{n-2}$$

Można to zauważyć analizując funkcję $f(x) = \alpha^x$ omawianą w punkcie 1.1.

Wybierając f_0 z dwóch przedziałów:

A) $f_0 \in [0; x_1)$ mamy przypadek z podpunktu a) powyżej

wtedy $f_1 = \alpha^{f_0} < f_0$, $f_2 = \alpha^{\alpha^{f_0}} > \alpha^{f_0}$ i widzimy że $f_2 < f_0$ itd..

B) analogicznie druga sytuacja

Tylko muszę zaznaczyć, że nie potrafię tego formalnie sformułować. Może na podstawie tego iż funkcja α^x jest malejąca od $f(0) = 1$ i ograniczona z dołu przez $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ zatem $\forall x \in R + \cup \{0\}$ $\alpha^x \in (0;1]$, gdzie z kolei $\forall x \in (0;1]$ $\alpha^x \in (0;\alpha]$ itd. Czyli zbiory możliwych wartości maleją w każdej iteracji, aż w nieskończoności do otoczenia punktu x_1.

Ilustracja tworzenia kolejnych wyrazów rekurencji:

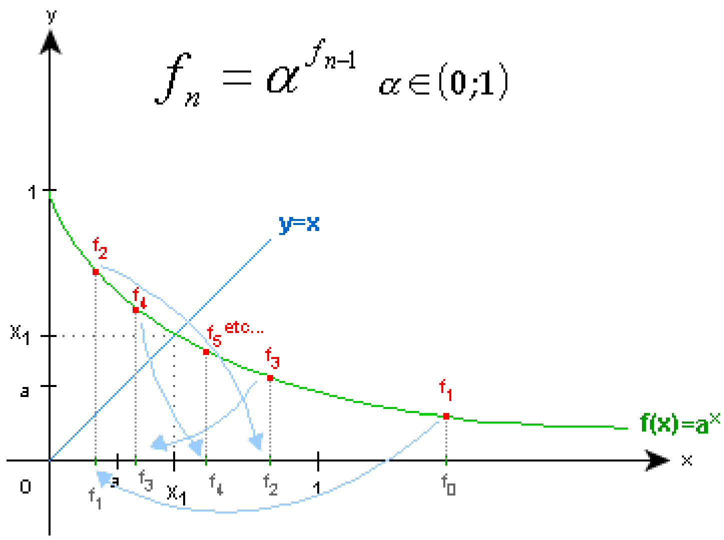

Fig.9

Notka

Może można by było ową metodę rekurencyjną uogólnić do innych równań co najmniej postaci $f(x) - x = 0$, oczywiście z dodatkowymi kryteriami, które trzeba by było opisać. Właściwie ta praca powstała jako wstęp do tej metody, czy okaże się interesująca [metoda], nie wiem.

Maciek Ciupa, Lipiec 2006
Maciek.ciupa@gmail.com
www.dejaview.cad.pl/brudnopis_naukowy.php