Liczby Bella

Czyli podziały zbioru *n* elementowego na niepuste, parami rozłączne podzbiory dające w sumie zbiór wyjściowy. (patrz [5])

1. Rekurencja i funkcja tworząca:

Oznaczmy przez B_{n+1} - liczba podziałów zbioru *n+1* elementowego zgodnie z def. liczb Bella.

Rekurencja:
Wybierzmy najmniejszy element i rozpatrzmy rozłączne klasy ze względu na to z iloma innymi elementami jest on w podzbiorze. Może być sam, ale może być ze wszystkimi. Zatem wybierzmy podzbiór *i*-elementowy $i = 0,1,..,n$ a pozostałe *n-i* elementów zgodnie z def. na B_{n-i} sposobów:

$$B_0 = 1$$

(1) $$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}\ ,\ n \geq 0$$

Funkcja tworząca:
Przy pomocy funkcji tworzącej wykładniczej $F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n$, po zróżniczkowaniu:

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \sum_{n\geq 1} D_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n\geq 0} D_{n+1} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}\right)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}B_{n-k}\right)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_{n-k}}{k!(n-k)!}\right)x^n = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{B_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n$$

Zauważamy, że mamy splot dwóch funkcji, zatem

$$= \left(\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0}B_n\frac{x^n}{n!}\right) = e^x \cdot F(x)$$

Mamy równanie: $F'(x) = e^x F(x)$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = e^x \Rightarrow \ln|F(x)| = e^x + C \Rightarrow F(x) = e^{e^x + C}$$

Z warunków początkowych B_0=1 i F(0) mamy $C = -1$:

(2) $$F(x) = e^{e^x - 1} = \frac{1}{e} e^{e^x}$$ (to wizualnie już jest ciekawe!)

Wzór jawny na B_{n+1}

$$F(x)=\frac{1}{e}\cdot e^{e^x}=\frac{1}{e}\sum_{k\geq 0}\frac{\left(e^x\right)^k}{k!}=\frac{1}{e}\sum_{k\geq 0}\frac{e^{x\cdot k}}{k!}=\frac{1}{e}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(xk)^n}{n!}\right)=\frac{1}{e}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{k^n}{n!}x^n\right)$$

$$=\frac{1}{e}\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\right)=\frac{1}{e}\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}\right)\frac{x^n}{n!}$$

Dobinski Formula:

$$B_n=\frac{1}{e}\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}$$

Literatura:

[1] *Wykłady z kombinatoryki*, Palka Zbigniew, Ruciński Andrzej
[2] *Matematyka konkretna*, R.L. Graham, D.E.Knuth, O.Patashnik
[3] *Matematyka dyskretna*, K.A.Ross, C.R.B.Wright
[4] Home Page AKK http://ii.uwb.edu.pl/akk/dydaktyka/dyskr/dyskretna.htm
[5] Liczby Bella - **Zadania Ewy Krot-Sieniawskiej z [4]**