

Zbiór Mandelbrota w \mathbf{R}^1

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = x_n^2 + c, \quad c \in \mathbf{R}$$

(wersja robocza...)

Streszczenie: Jest to jednowymiarowa wersja rekurencji dla zbioru Mandelbrota. Poszukujemy takiego zbioru $M \subseteq \mathbf{R}$, dla którego ciąg $\{x_n\} \equiv X$ zadany rekurencją

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_{n+1} &= x_n^2 + c \quad n \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $c \in M$, nie jest rozbieżny. Posłużymy się rozwiązaniem równania $f(x) = x$ dla funkcji $f(x) = x^2 + c$ oraz rekurencją [1] z warunkami początkowymi będącymi rozwiązaniem tegoż równania. Materiał wykorzystany w tych notatkach obejmuje podstawowe metody analizy matematycznej i matematyki dyskretnej.

1 Kryterium zbieżności

Ciąg X będzie zbieżny, kiedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + c) = g$$

gdzie g będzie granicą skończoną ciągu X przy $n \rightarrow \infty$.

Spostrzeżenie 1

Niech $f(x) = x^2 + c$, weźmy pod uwagę równanie

$$f(x) = x \tag{2}$$

z rozwiązaniami odpowiednio α, β (w przypadku jednego oczywiście $\alpha = \beta$) oraz rekurencję :

$$\begin{aligned} x_0 &\in \{\alpha, \beta\} \\ x_{n+1} &= x_n^2 + c \quad n \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Ciąg X będzie zbieżny, a właściwie równy $X = x_0, x_0, x_0, \dots$.

Dowód

Z (3) mamy: $x_0 = \alpha$, (bądź $x_0 = \beta$, założmy, że jedno z nich) zatem $x_1 = x_0^2 + c$, ale dzięki zdefiniowanej funkcji $f(x) = x^2 + c$ możemy zapisać $x_1 = f(x_0) = f(\alpha)$. Teraz zakładając rozwiązanie równania [2] mamy, że $f(\alpha) = \alpha$, zatem $x_1 = \alpha$, indukcyjnie postępując udowodniliśmy zbieżność ciągu zadanego rekurencją (3).

Dowód oparliśmy na założeniu, że równanie (2) ma rozwiązania. Dlatego w następnej kolejności rozpatrzmy, dla jakich c równanie to ma faktycznie rozwiązanie jedno, bądź dwa różne.

Następnie wykorzystamy (3), aby udowodnić, że rekurencja (1) z odpowiednimi założeniami ma taki sam przedział $c \in R$ zbieżności.

2 Równanie $f(x) = x$

Niech $f(x) = x^2 + c$, rozpatrzmy równanie $f(x) = x$, czyli

$$x^2 - x + c = 0$$

2.1 Jedno rozwiązanie

Kiedy $\Delta = 0$, czyli $1 - 4c = 0 \rightarrow c = \frac{1}{4}$

Rozwiązanie $x_1 = \alpha = \frac{1}{2}$

2.2 Dwa rozwiązania

Kiedy $\Delta > 0$, czyli $1 - 4c > 0 \rightarrow c < \frac{1}{4}$

Rozwiązanie $x_1 = \alpha = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$ oraz $x_2 = \beta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$

Wniosek:

Mamy zatem przedział $c \in (-\infty, 1/4] = N$, dla którego ciąg z (3) będzie zbieżny z warunkami początkowymi $x_0 = \{\alpha, \beta\}$. Następnie spróbujemy dowieść, że istnieje taki podprzedział $M \subseteq N$, dla którego rekurencja (1) również będzie zbieżna.

3 Rekurencja $x_{n+1} = x_n^2 + c$

Przypomnijmy

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\x_{n+1} &= x_n^2 + c \quad n \geq 0\end{aligned}\tag{1}$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$.

Rozpatrzmy trzy przedziały dla c :

- $c = 1/4$
- $c \in (0; 1/4)$
- $c \in (-\infty; 0)$

Przypadkiem, kiedy $c = 0$ i $c = -2$ nie będziemy się zajmować, ponieważ ciąg jest wtedy trywialnie zbieżny.

3.1 Przedział $C = 1/4$

► Zauważmy, że jak zachowuje się ciąg X dla $c = 1/4$:

$x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = (1/4)^2 + 1/4 = 5/16$, $x_3 = (5/16)^2 + 1/4 = 89/256$, ... jak widać ciąg jest rosnący.

Dowód indukcyjny:

- $x_0 = 0$, $x_1 = c > x_0$
- załóżmy, że dla x_n spełnia tj. $x_n > x_{n-1}$, wykażmy, że dla x_{n+1} spełnia tj.
 $x_{n+1} > x_n \rightarrow x_n^2 + c > x_{n-1}^2 + c \rightarrow x_n^2 > x_{n-1}^2$, a że rozpatrujemy wyrazy dodatnie ($x_n > 0$ dla $n > 0$) zatem $x_n > x_{n-1}$ □

► Teraz zauważymy, że ten rosnący ciąg jest ograniczony z góry przez rozwiązanie równania (2) dla aktualnie rozpatrywanego $c = 1/4$ tj. $\alpha = 1/2$.

Dowód przez zaprzeczenie:

Rozpatrzmy rosnącą funkcję $g(x) = x^2 + 1/4$ i równanie $g(x) = x$. Ma ono jedno rozwiązanie $x = 1/2$, bo $(1/2)^2 + 1/4 = 1/2$. Nie istnieje $x \in [0, 1/2]$ taki, że $g(x) > 1/2$, zatem $\forall x \in [0, 1/2]$ $g(x) \leq 1/2$.

Wyrazy naszego ciągu x_n rosną począwszy od $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, ... ale nie istnieje taki x_n , dla którego $x_{n+1} = g(x_n) > 1/2$, ponieważ implikuje to, że $x_n > 1/2$, co z kolei, że $x_{n-1} > 1/2$ itd. aż do $x_0 > 1/2$ co jest sprzeczne z założeniem $x_0 = 0$. □

Wniosek:

Czyli nasz ciąg dla $c = 1/4$ będzie zbieżny tj.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + 1/4) = 1/2$$

dla $x_0 = 0$

3.2 Przedział $c \in (0 ; 1/4)$

Podobnie postąpimy jak w punkcie 3.1. Ciąg x_n również będzie rosnący (dowód indukcyjny identyczny jak w 3.1).

► Ciąg ten również jest ograniczony z góry przez dodatnie rozwiązanie równania (2) tj.

przez $\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$

Dowód przez zaprzeczenie

Rozpatrzmy rosnącą funkcję $g(x) = x^2 + c$ i równanie $g(x) = x$. Jak pokazaliśmy w punkcie 2.2 $g(\alpha) = \alpha$, gdzie $\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$. Co więcej (podobnie jak w 3.1) $g(x) > \alpha$ implikuje $x > \alpha$ dla $x > 0$.

Wyrazy naszego ciągu x_n rosną od $x_0 = 0 < x_1 = c$ i są ograniczone przez $g(\alpha) = \alpha = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$. Załóżmy przeciwność, czyli $\exists x_n$ taki że $x_{n+1} > \alpha$, to nam implikuje, że $x_{n+1} = g(x_n) > \alpha \rightarrow x_n > \alpha$ itd. aż do $x_0 > \alpha$ co jest sprzeczne z założeniem $x_0 = 0$ □

3.3 Przedział $c \in (-\infty ; 0)$

Rozpatrzmy ujemne wartości c , ale jak łatwo zauważyć nie dla wszystkich ujemnych ciąg będzie zbieżny. Zatem będziemy poszukiwać takiego podprzedziału, w którym będzie zbieżny.

Ciąg dla pewnych c będzie naprzemienny, dla innych rosnący. Jak się okaże tylko dla tych c , dla których będzie naprzemienny nie będzie rozbieżny.

Spostrzeżenie 2

Niech $c' = -c$, wtedy $g(c') = c'^2 - c'$. Dla c' spełniających:

$$c'^2 - c' > c' \quad [4]$$

ciąg (1) będzie rosnący i nieograniczony z góry.

A równanie jest spełnione dla $c' \in \mathbb{R} \setminus [0, 2]$, zatem $c \in (-\infty, -2)$ uwzględniając $c \in (-\infty; 0)$.

Dowód indukcyjny

Niech $c'^2 - c' > c'$, zatem tym bardziej zostanie spełniony warunek $c'^2 - c' > 0$. Z $c'^2 - c' > c'$ mamy $g(c') > c' > 0$, a to implikuje $g(c'^2 - c') > c'^2 - c' > c' > 0$ (Lemat 1), ponieważ funkcja g dla dodatnich argumentów jest rosnąca tj.: $\forall x, y > 0 \wedge x > y : g(x) > g(y)$.

a) $x_2 > x_1$ czyli $c'^2 - c' > c'$ jest spełnione z założenia

b) niech dla $x_n > x_{n-1}$ będzie spełnione,

$x_{n+1} > x_n \rightarrow x_n^2 - c' > x_{n-1}^2 - c' \rightarrow x_n^2 > x_{n-1}^2$, zauważyliśmy, że dla $c'^2 - c' > c'$ funkcja $g(x)$ będzie rosnąca po dodatnich wartościach, czyli $x_n^2 > x_{n-1}^2 \rightarrow x_n > x_{n-1}$, a że nie ma granicy tj.: $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, ciąg x_n będzie rozbieżny \square

*) $g(c'^2 - c') > c'^2 - c' \rightarrow (c'^2 - c')^2 - c' > c'^2 - c' \rightarrow (c'^2 - c')^2 > c'^2$, skoro $c'^2 - c' > c' > 0$ to $c'^2 - c' > 0 \wedge c' > 0$ zatem $(c'^2 - c')^2 > c'^2 \rightarrow c'^2 - c' > c' \rightarrow c'^2 > 0 \square$

Wniosek:

Dla $c \in (-\infty, -2)$ omawiany ciąg będzie rozbieżny, zatem rozpatrzmy dalej jedynie przedział $c \in (-2, 0)$.

3.4 Przedział $c \in (-2, 0)$

Niech $c' = -c$ wtedy $g(x) = x^2 - c'$.

Nasz ciąg będzie zachowywał się odmiennie w zależności od położenia ujemnego miejsca zerowego $\gamma = -\sqrt{-c}$ funkcji $g(x)$ względem parametru c :

- $\gamma = c$
- $\gamma > c$
- $\gamma < c$

Ad a]

$$\gamma = c \rightarrow -\sqrt{-c} = c \rightarrow -c = c^2 \rightarrow c^2 + c = 0 \rightarrow c = -1$$

$$x_n = 0, -1, 0, -1, 0, \dots$$

Ad b]

$$\gamma > c \rightarrow -\sqrt{-c} > c \rightarrow \sqrt{-c} < -c \rightarrow -c < c^2 \rightarrow c^2 + c > 0 \rightarrow c \in (-2; -1)$$

Ciąg będzie naprzemiennie przyjmował wartości z zakresu $x_n \in [c; g(c)]$, ponieważ $\forall x \in [c; -c]: g(x) \in [c; g(c)]$. Czy będzie miał granicę? Ważne, że nie jest rozbieżny.

Ad c]

Analogicznie jak dla b) $\gamma < c \rightarrow c \in (-1; 0)$

W tym przypadku ciąg będzie zbieżny do ujemnego rozwiązania równania $g(x) = x$ czyli

$$x_2 = \beta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} \quad (2) \text{ przyjmując na zmianę wartości mniejsze i większe od tej granicy.}$$

$$g(0) = c < \beta, \quad g(c) > \beta, \quad g(g(c)) < \beta \text{ itd.}$$

4 Podsumowanie

Ciąg generowany przez rekurencję:

$$x_0 = 0$$

$$x_{n+1} = x_n^2 + c \quad n \geq 0$$

nie będzie rozbieżny dla :

- a) $c = 1/4$ (patrz punkt 3.1)
- b) $c \in (0 ; 1/4)$ (patrz punkt 3.2)
- c) $c \in (-2 ; 0)$ (patrz punkt 3.4)
- d) $c \in \{0, -2\}$

Zatem dla $c \in [-2; 1/4]$ ♣

5 Dodatkowe materiały

[1] Równanie $\alpha^x = x$ metodami analizy matematycznej i matematyki dyskretnej,
<http://www.dejaview.cad.pl/math/equationaxx.pdf>

Podziękowanie dla Pani Anety ena@tlen.pl za zwrócenie uwagi na inne rozwiązania, których wcześniej nie uwzględniłem.

Maciek Ciupa, 4 Lutego 2007

maciek.ciupa@gmail.com

www.dejaview.cad.pl/brudnopis_naukowy.php