Nieporządek – permutacja bez punktów stałych

np. (w zapisie cyklowym) [123...n] jest nieporządkiem , natomiast [1][23..n] nie jest nieporządkiem (element 1 przechodzi na siebie)

1. Rekurencja i funkcja tworząca:

Niech D_n oznacza liczbę nieporządków długości n

<u>Rekurencja</u>

Rozpatrzmy dwie rozłączne klasy

1) Element *i*-ty przechodzi na *j*-ty (jeden z *n-1* pozostałych), a *j*-ty na *i*-ty, reszta *n-2* elementów na D_{n-2} tj.: $(n-1)D_{n-2}$
2) Element *i*-ty przechodzi na *j*-ty (jeden z *n-1* pozostałych) ale *j*-ty niech nie przechodzi na *i*-ty, czyli załóżmy że j-ty „pełni obowiązki"[2] *i*-tego czyli zostaje nam do rozmieszczenia n-1 elementów na D_{n-1} sposobów tj.: $(n-1)D_{n-1}$

Z zasady dodawania mamy:

(1) $$\begin{aligned} &D_0 = 1 \wedge D_1 = 0 \\ &D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \qquad n \geq 2 \end{aligned}$$

Funkcja tworząca i wzór jawny:

Przy pomocy funkcji tworzącej wykładniczej $D(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n$, po zróżniczkowaniu:

$$D'(x) = \frac{dD(x)}{dx} = \sum_{n\geq 1} \frac{D_n}{(n-1)!} x^{n-1} \overset{D1=0}{=} \sum_{n\geq 2} \frac{D_n}{(n-1)!} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n\geq 2} \frac{(n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n\geq 2} \frac{D_{n-1} + D_{n-2}}{(n-2)!} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n\geq 2} \frac{D_{n-1}}{(n-2)!} x^{n-1} + \sum_{n\geq 2} \frac{D_{n-2}}{(n-2)!} x^{n-1} = x\sum_{n\geq 2} \frac{D_{n-1}}{(n-2)!} x^{n-2} + x\sum_{n\geq 2} \frac{D_{n-2}}{(n-2)!} x^{n-2}$$

$$= x\sum_{n\geq 1} \frac{D_n}{(n-1)!} x^{n-1} + x\sum_{n\geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n$$
$$= xD'(x) + xD(x)$$

Proste równanie różniczkowe:

(2) $$D'(x) = xD'(x) + xD(x)$$

$$D'(x)(1-x) = xD(x)$$

$\frac{D'(x)}{D(x)} = \frac{x}{(1-x)}$, całkujemy obustronnie:

$$\int \frac{D'(x)}{D(x)} dx = \int \frac{x}{(1-x)} dx \Rightarrow \ln|D(x)| = -x - \ln|1-x| + \ln C$$

$D(x) = e^{-x+\ln\left|\frac{c}{1-x}\right|} = e^{-x}\frac{c}{1-x}$, z warunków początkowych tj.:

$$D(0) = \sum_{n\geq 0} D_n \frac{x^n}{n!}\Bigg|_{x=0} = e^0 \frac{c}{1-0} \Rightarrow C = 1$$

<u>Funkcja tworząca dla nieporządków:</u>

(3) $$D(x) = e^{-x}\frac{1}{1-x}$$

$$D(x) = e^{-x}\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-x)^n}{n!}\cdot\sum_{n\geq 0} x^n \overset{spolot}{=} \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)x^n = \sum_{n\geq 0} n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)\frac{x^n}{n!}$$

<u>Wzór jawny</u>

(4) $$D_n = \left[\frac{x^n}{n!}\right]D(x) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

2. Z zasady włączeń-wyłączeń:

Oznaczmy przez

A_i - zbiór takich permutacji, w których *i*-ty element przechodzi na *i*-ty $i \in [n]$

$\neg A_i$ - zbiór takich permutacji, k których *i*-ty element nie przechodzi na *i*-ty $i \in [n]$

Szukamy zatem liczności zbioru: $|\neg A_1 \cap \neg A_2 \cap \ldots \cap \neg A_n|$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \neg A_i\right| \overset{DeMorgana}{=} \neg\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |X| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$

W naszym przypadku X będzie zbiorem wszystkich permutacji, czyli $|X| = n!$

Wzór Sylvestera:

$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} S_k^n$, gdzie $S_k^n = \sum_{I\in[n]^k}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$, czyli po wszystkich k-elementowych podzbiorach zbioru n-elementowego

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = (|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2| + \ldots |A_{n-1} \cap A_n|) + \ldots + (-1)^{n-1}(|A_1 \cap \ldots \cap A_n|)$$

Liczności poszczególnych zbiorów:

$|A_i| = (n-1)!$ - i-ty element przechodzi na siebie na 1 sposób a reszta dowolnie

$\left|A_i \cap A_j\right| = (n-2)!$, *gdzie* $i \neq j$, analogicznie z tym że tu dwa elementy wybrane na 1 sposób

...

$\left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right| = (n-n)!$

Zauważmy że zbiorów A_i mamy $n = \binom{n}{1}$. Podwójnych przecięć mamy tyle ile jest podzbiorów dwuelementowych z n-elementowego tj.: $\binom{n}{2}$ itd... zatem:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! \tag{5}$$

Przekształcając dojdziemy do (4)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Literatura:

[1] *generatingfunctionology*, Herbert S.Wilf
[2] *Wykłady z kombinatoryki*, Palka Zbigniew, Ruciński Andrzej
[3] *Matematyka konkretna*, R.L. Graham, D.E.Knuth, O.Patashnik
[4] Home Page AKK http://ii.uwb.edu.pl/akk/dydaktyka/dyskr/dyskretna.htm