Suriekcje $f:[n]\to[k]$ – czyli funkcje „na"

Wyprowadzimy wzór na liczbę suriekcji zbioru n elementowego w zbiór k elementowy

1. Z zasady włączeń wyłączeń

Rozpatrzmy poszczególne przeciwobrazy, tj.: $f^{-1}[i],\ i\in[k]$

A_i - i-ty przeciwobraz $i\in[k]$ ma przyporządkowany jakiś element z dziedziny tj.: $f^{-1}[i]\neq\phi$

$\neg A_i$ - i-ty przeciwobraz $i\in[k]$ jest pusty tj.: $f^{-1}[i]=\phi$

Szukamy zatem: $|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k|$

$$|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k| \overset{DeMorgana}{=} \neg|\neg A_1\cup\neg A_2\cup\ldots\cup\neg A_k| = |X| - |\neg A_1\cup\neg A_2\cup\ldots\cup\neg A_k|$$

W naszym przypadku zbiorem X będzie zbiór wszystkich dowolnych funkcji $f:[n]\to[k]$ czyli $|X|=k^n$

Wzór Sylvestera:

$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}S_k^n$, gdzie $S_k^n = \sum_{I\in[n]^k}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$, czyli po wszystkich k-elementowych podzbiorach zbioru n-elementowego

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = (|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_n|)-(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_2|+\ldots|A_{n-1}\cap A_n|)+\ldots+(-1)^{n-1}(|A_1\cap\ldots\cap A_n|)$$

Obliczmy liczności poszczególnych zbiorów:

$|\neg A_i| = (k-1)^n$ - za każdym razem wybieramy z k-1 elementowego zbioru wartości (ponieważ jeden musi być niewykorzystany)

$|\neg A_i\cap\neg A_j| = (k-2)^n$, $gdzie\ i\neq j$, analogicznie j.w.

...

$|\neg A_1\cap\neg A_2\cap\ldots\cap\neg A_k| = (k-k)^n$

Zauważmy że zbiorów A_i mamy $k=\binom{k}{1}$. Podwójnych przecięć mamy tyle ile jest podzbiorów dwuelementowych z n-elementowego tj.: $\binom{k}{2}$ itd... zatem:

$$|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k| = k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \ldots + (-1)^k\binom{k}{k}(k-k)^n$$

(1) $$sur_{n \to k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

Można dzięki tej metodzie od razu wyprowadzić wzór na Liczby Stirlinga II rodzaju, zauważając że $k!\left\{ {n \atop k} \right\}$ jest równe liczbie surjekcji $f:[n] \xrightarrow{na} [k]$ czyli

$k!\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$ zatem $\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{i^n}{i! \cdot (k-i)!}$ patrz [4]

Literatura:

[1] *Wykłady z kombinatoryki*, Palka Zbigniew, Ruciński Andrzej
[2] *Matematyka konkretna*, R.L. Graham, D.E.Knuth, O.Patashnik
[3] *Matematyka dyskretna*, K.A.Ross, C.R.B.Wright
[4] Home Page AKK http://ii.uwb.edu.pl/akk/dydaktyka/dyskr/dyskretna.htm